

Copyright © 2015 by Academic Publishing House *Researcher*

Published in the Russian Federation  
 Russian Journal of Astrophysical Research. Series A  
 Has been issued since 2015.  
 ISSN: 2410-9347  
 Vol. 1, Is. 1, pp. 45-50, 2015

DOI: 10.13187/rjar.2015.1.45  
[www.ejournal28.com](http://www.ejournal28.com)



UDC 523.11

## Electrical Charge in a Closed Universe

Dmitry D. Sokoloff <sup>a, \*</sup><sup>a</sup> Lomonosov Moscow State University, Russian Federation

### Abstract

In the framework of standard general relativity the electrical charge in a closed universe must vanish identically. Correspondingly, one can not consider, say, electrical field of an isolated charge or Green's function even hypothetically. A way to modify general relativity in order to allow such constructions is suggested. The idea of this modification is based on concept of geodesic mapping and tangent bundle.

**Keywords:** electrical charge, closed universe.

### Введение

Общая теория относительности, без сомнения, является одним из величайших достижений человеческой мысли, фундаментом современной космологии. Однако она, как и другие великие физические теории, в чем-то ограничена и, наверное, в будущем подвергнется какой-то переработке под давлением экспериментальных и наблюдательных фактов. Накопление таких фактов представляет собой задачу чрезвычайно сложную технически и многие фундаментальные задачи, решение которых сейчас стоит в повестке дня теории и наблюдений (скажем, наблюдения гравитационных волн) были теоретически предложены много лет назад. Поэтому ожидать появления новой широко признанной теории, существенно развивающей общую теорию относительности в обозримом будущем не приходится несмотря на постоянные усилия специалистов по развитию подобной теории. Тем не менее, постепенно накапливается определенный запас неудовлетворенности от того, как именно общая теория относительности разрешает конкретные проблемы, встающие перед этой теорией. Конечно, эти проблемы были в определенной степени были видны и раньше, а иногда на них обращали внимание и сразу же после создания ОТО, но они благоразумно оставались без критического анализа для того, чтобы не тормозить решение тех задач, которые можно и нужно было решить. Эти проблемы нельзя решить и сегодня просто потому, что существующая теория научилась их обходить и имеющийся фактический материал не вынуждает нас что-либо менять в теории. Другими словами, эти проблемы можно на долгое время замести под ковер до лучших времен. Обычно подобные вопросы не входят в область внимания науки, которая ограничивается изучением актуальных вопросов. Тем не менее кажется, что ситуация в общей теории относительности сейчас созрела настолько, что обсуждение подобных вопросов все же становится возможным в принципе.

\* Corresponding author

E-mail addresses: [sokoloff.dd@gmail.com](mailto:sokoloff.dd@gmail.com) (D.D. Sokoloff)

## Обсуждение

В предыдущих работах (Соколов, 2002, 2003) мы обсудили две таких темных проблемы и в данной работе обсуждаем еще одну. Общая черта, объединяющая все три темных места в общей теории относительности, состоит в том, что в логическом каркасе ОТО недостаточно прописано то, как и из каких соображений определяется многообразие, которое несет псевдориманову метрику. Можно сказать, что молчаливо предполагается, что мы интересуемся не слишком большой окрестностью наблюдателя, в которой рассматриваемое многообразие неотличимо топологически от евклидова пространства. Что при этом происходит вне этой окрестности, устанавливается не на уровне формулировки теории, а на уровне анализа конкретных решений уравнений Эйнштейна. Эта точка зрения очевидно непоследовательна, на что нелицеприятно указал, например, Ф. Клейн (1919) сразу же после формулировки ОТО. Он подчеркнул, что одна и та же локальная метрика может быть представлена в различных топологических версиях. В настоящее время именно этот аспект проблемы глобального строения космологических моделей лучше всего разработан и даже до определенной степени изучен наблюдательно (см. Лашез-Рей и Люмине, 1995), однако до логически стройной теории и здесь еще далеко (см, напр., Соколов, 2002, 2003).

Несомненно, что поступок Эйнштейна, который не стал концентрироваться на указанной трудности, а занялся позитивной разработкой теории, был исторически оправдан. Замечание Клейна является наиболее известным, но не единственным. За время существования ОТО таких замечаний набралось достаточное количество (см. напр. Герценштейн и Константинов, 1975). Иногда такие замечания имеют форму примеров, которым трудно дать какую-либо разумную интерпретацию. Например, Фирц и Йост (1965) построили пример псевдориманова многообразия в форме двумерного тора, которое является геодезически неполным. Это значит, что пробные частицы в таком мире живут лишь конечное собственное время, хотя ничего заслуживающего названия сингулярности в этом пространстве-времени нет или, по крайней мере, мы не умеем ее опознать.

## Результаты

В данной работе мы специально рассмотрим еще одно темное место ОТО и космологии, связанное с глобальным строением космологических моделей. В отличие от упомянутых ранее темных мест, которые обычно не включают в учебники, этот вопрос изложен, скажем, в фундаментальной книге Ландау и Лифшица (1967), однако при этом на вопросе не заостряется внимание. Речь идет о том, что в замкнутой космологической модели полный электрический заряд равен нулю. Это, конечно, является непосредственным следствием теоремы Гаусса, которая, как показывает анализ, применима и в ОТО: полный заряд пропорционален потоку электрического поля через бесконечно удаленную поверхность. Поскольку в закрытой модели нет бесконечности, то обращается в нуль поток, а с ним и полный заряд.

Логически этот вывод не содержит противоречий. Возможно, что он даже хорошо согласуется с современными построениями в теории ранней Вселенной, в которой заряженные частицы возникают парами и естественно полагать, что полный заряд Вселенной равен нулю. Однако принятие подобной точки зрения в полном объеме представляет собой серьезный разрыв с привычными физическими представлениями. Мы вынуждены сказать, что в замкнутой космологической модели даже мысленно нельзя себе представить электрическое поле уединенного заряда, а мы вынуждены рассматривать поле пары зарядов, когда-то родившихся вместе, а с тех пор как-то разошедшихся в пространстве. Эта рекомендация совершенно нереализуема в практическом плане, а здравый смысл подсказывает, что поведение уединенного электрона странно связывать со строением Вселенной как целого.

Настораживает и то, что подобная проблема возникает только в закрытом мире, а в открытом мире эта трудность не возникает. Совершенно не помогает делу и желание рассматривать уединенный электрон как пробную частицу и не учитывать его вклад в формирование космологической модели. С другой стороны, настаивать на том, что один нескомпенсированный заряд электрона мог бы кардинально изменить топологическое строение Вселенной, без нужды не хочется.

Настораживает и то, что, скажем, электродинамика в космологической модели с критической плотностью и плоским неограниченным пространственным сечением и в аналогичной модели с пространственным сечением в виде плоского тора должны трактоваться совсем по-разному. В самом деле, в первой из них есть пространственная бесконечность, а в другой она отсутствует.

Другим аспектом проблемы является то, что в замкнутой Вселенной исчезает понятие функции Грина (поскольку не бывает уединенных зарядов) и вместо нее придется рассматривать функцию, определяемую парой точечных частиц. Эта модификация теории является необходимой даже если мы примем гипотезу о том, что разделение зарядов возможно лишь в небольших областях пространства и, скажем, в масштабах Земли заряды полностью и в точности компенсированы.

Удручает и то, что проблема с функцией Грина возникает при рассмотрении локальных задач, не имеющих никакого отношения к космологической проблеме. На эту трудность до определенной степени указывал Докур, 1971.

Вполне возможно, что все эти следствия в будущем найдут свое экспериментальное подтверждение. Однако элементарная осторожность рекомендует сначала проверить, нельзя ли так подправить теорию, чтобы устранить настораживающие обстоятельства. Оказывается, такая возможность действительно есть. Для того, чтобы ее выявить, постараемся понять, что приводит к изучаемой проблеме. По-видимому то, что электромагнитное поле и четырехмерный вектор тока рассматриваются в виде тензорного и векторного полей на четырехмерном искривленном пространстве-времени. Сами эти объекты находятся в касательном пространстве к многообразию, но компоненты, как это и должно быть в римановой геометрии, являются функциями координат на многообразии.

Соответственно, в релятивизированных уравнениях Максвелла фигурируют производные по координатам на пространстве-времени. Поэтому если релятивистская версия уравнений Максвелла содержит теорему Гаусса (а от этого никак не хотелось бы отказываться), то обсуждаемая трудность неизбежна.

В момент формулировки общей теории относительности геометрия не предоставляла других возможностей. Однако сейчас геометрия предлагает конструкцию касательного расслоения, суть которой состоит в следующем.

Не станем переносить уравнения Максвелла в искривленное пространство, а оставим их обычными уравнениями из специальной теории относительности. Для того, чтобы не отказаться при этом от ОТО, будем считать, что эти уравнения выписываются в каждой точке пространства-времени, а фигурирующие в них векторные и тензорные поля зависят от двух наборов четырехмерных переменных,  $(x^\mu, y^\nu)$ . Привлекательность такого поступка состоит в том, что и теорема Гаусса сохраняется, и у пространства, в котором эта теорема записывается, граница не исчезает и ничего нового по сравнению со специальной теорией относительности не происходит по определению. Эта конструкция, собственно, и называется касательным расслоением.

Трудности этого подхода тоже очевидны – нужно что-то сделать с избыточными переменными – однако они выглядят преодолемыми. Для их преодоления нужно связать координаты в касательном пространстве ( $y^\nu$ ) и на многообразии ( $x^\mu$ ). Для этого разработано понятие экспоненциального отображения.

Пусть мы фиксировали точку  $x^\mu = x^\mu_0$  и хотим сопоставить точке  $y^\nu$  некоторую точку  $x^\mu_1$ . Для этого из точки  $x^\mu_0$  испускаются геодезическая в направлении вектора  $y^\mu_0$  и на ней откладывается расстояние (интервал), равный длине (интервалу) вектора  $y^\mu_0$ . Понятие экспоненциального отображения разработано для случая римановой геометрии (Громол и др. 1971). Для псевдориманова случая, интересного в общей теории относительности, при построении этого отображения возникает проблема с изотропными геодезическими, интервал на которых равен нулю.

В этом случае следует выбрать один из касательных векторов к изотропной геодезической в касательном пространстве точки  $x^\mu_0$  и использовать его для построения геодезического параметра как на многообразии, так и в касательном пространстве и отождествить точки с одним значением геодезического параметра. При этом, очевидно, построенное соответствие не зависит от выбора изотропного вектора также, как соответствие для неизотропных геодезических не зависит от выбора единицы длины.

Экспоненциальное отображение не зависит от системы координат и далее мы опускаем координатные индексы у переменных.

Экспоненциальное отображение порождает связь между векторными, тензорными и другими полями в точке  $x_0$  и в точке у касательного пространства точки  $x_0$ . Для этого мы должны рассматривать в касательных пространствах не просто свободные векторы, а векторы, снабженные точкой приложения. Можно сказать по-другому: мы начинаем рассматривать в качестве касательного пространства не векторное, а аффинное пространство. Этот поступок вполне вписывается в рамки современной геометрии.

Используя экспоненциальное отображение, можно перенести физические величины с многообразия в касательные пространства. Выписав теперь уравнения Максвелла в каждом из касательных пространств, мы получаем семейство уравнений Максвелла, связанных друг с другом с помощью экспоненциального отображения, в построении которого участвует метрика, а следовательно и гравитация. В рамках такого построения уравнения Эйнштейна выписываются не в касательном пространстве, а по-прежнему на самом многообразии.

В принципе, намеченный подход можно было бы детализировать и получить решения подобных уравнений в каких-то частных случаях. К сожалению, имеющиеся наблюдательные факты и факты, появление которых разумно ожидать в обозримом будущем, не дают для этого повода. Поэтому мы ограничимся обсуждением того, как в рамки этой схемы вписывается нетривиальная топология сопутствующего пространства и всего пространства-времени.

Экспоненциальное отображение не обязательно является взаимно-однозначным и одной пространственно-временной точке может соответствовать несколько, даже бесконечно много точек на касательном пространстве. Если пространство-время имеет неевклидову топологию, то это неизбежно. Однако даже если пространство-время устроено как евклидово пространство, то геодезические, исходящие из заданной точки, могут пересекаться и экспоненциальное отображение может терять взаимную однозначность. Именно это и происходит в гравитационных линзах. В результате один и тот же заряд, находящийся на пространстве-времени, изображается на касательном пространстве в виде целой системы зарядов. Однако ничто не мешает нам рассматривать вклад каждого из этих изображений в электромагнитное поле по отдельности, строить функцию Грина и производить другие стандартные операции. Даже если условие идеального равенства нулю полного заряда пространственно замкнутой Вселенной действительно имеет место, оно не должно учитываться на каждом шагу при исследовании локальных электрических полей, а учитывается лишь на уровне суммирования отдельных вкладов.

Подчеркнем еще раз, что с точки зрения сегодняшней практики решения конкретных физических задач, учитывающих общерелятивистские эффекты, никому и не приходит в голову, например, учитывать строение Вселенной как целого при обсуждении свойств данной черной дыры. Другими словами, предлагаемый подход достаточно вписывается в практику реальных исследований по общей теории относительности.

Кажется, что предлагаемый подход открывает и иную возможность. Можно построить математическую конструкцию, в которой место касательного пространства занимает пространство состояний квантовой механики. В этом случае место экспоненциального отображения должно занять некоторое отображение пространства состояний, ассоциированного с точкой  $x_0$ , в пространство состояний, ассоциированного с точкой  $x_1$ . Это отображение может описывать роль гравитационного поля в квантовой физике.

Рассмотрим предлагаемый подход на конкретном примере. Пусть в замкнутом фридмановском мире в пространственной точке  $A$  находится единичный отрицательный заряд (скажем, электрон), который покоится относительно системы отсчета, связанной с реликтовым излучением. Будем рассматривать точку  $A$  как полюс сферы и обозначим противоположный полюс через  $B$ . С точки зрения стандартной общей теории относительности в сферическом пространстве должен существовать еще один заряд, на этот раз единичный положительный (скажем, позитрон), причем местоположение этого заряда  $A'$ , вообще говоря, никак не связано с местоположением первого заряда и никак не задано для наблюдателя, изучающего первый заряд. Тем не менее, для того, чтобы изучать электрическое поле первого заряда, мы должны учитывать второй заряд. В этом, собственно, и состоит рассматриваемая трудность.

В предлагаемом подходе трудность обходится определенной релятивизацией понятия электрического заряда. Для наблюдателя, связанного с точкой А и изучающего ее касательное пространство, возможно рассмотрение одного изолированного заряда, находящегося в этой точке. При этом в касательном пространстве силовые линии электрического поля уходят на бесконечность и не возникает проблем с теоремой Гаусса. Если на самом деле все электрические заряды во Вселенной скомпенсированы, то их суммарное электрическое поле, которое только и представляет физический интерес, такое же, как в ОТО. Однако теперь мы, по крайней мере мысленно, имеем возможность рассмотреть и электрическое поле нескомпенсированного заряда. Для того, чтобы не усложнять без нужды ситуацию, допустим, что этот заряд единственный и внесен во Вселенную из какого-то внеположенной ей физической реальности.

Тогда силовые линии электрического поля, спроектированные на риманово пространственное сечение, снова сойдутся в противоположном полюсе сферы В. Для наблюдателя, находящегося в этой точке и изучающего соответствующее касательное пространство, заряд, причем не отрицательный, а положительный, находится в точке В. Для наблюдателя же, внесшего заряд в нашу Вселенную и оперирующего ей как целым, наряду с отрицательным зарядом, внесенным в точку А, в точке В спонтанно появляется положительный электрический заряд и полный заряд Вселенной снова равен нулю.

### Заключение

Подводя итог, можно сказать, что анализируемая проблема в основаниях общей теории относительности позволяет предположить, что на уровне рассмотрения, оперирующем Вселенной как элементом более обширного ансамбля (а такие схемы, пусть на уровне смелого полета мысли, появляются в современной науке), понятия наблюдателя и электрического заряда могут расщепиться на несколько и проявить еще одну ступень релятивизации.

Обратим также внимание на еще одну родственную задачу. Пусть мы внесли отрицательный электрический заряд в фокус  $F_1$  гравитационной линзы. Часть силовых линий электрического поля, исходящие из этого фокуса, снова собираются во втором фокусе  $F_2$  и их конфигурация соответствует паре положительного и отрицательного заряда, находящимся бесконечно близко от  $F_2$ . Если линза не идеальна, то вблизи  $F_2$  возникает заряженный конденсатор, а следовательно и поляризация вакуума. Если бы мы могли проводить физические эксперименты с гравитационными линзами, то проведение эксперимента с поляризацией вакуума представляло бы несомненный интерес. В реальности нам доступно в лучшем случае наблюдение гравитационных линз и традиционно считается, что нескомпенсированными электрическими зарядами в астрономии можно пренебрегать. Однако электрический заряд, скажем, Земли равен нулю все же приближенно, а не точно. Не исключено, что какие-то эффекты, связанные с нескомпенсированными электрическими зарядами можно усмотреть и в наблюдениях гравитационных линз.

### Примечания:

1. Герценштейн М.Е., Константинов Ю.Н., 1975; в сб. Проблемы теории гравитации и элементарных частиц, Т. 6, М., Атомиздат. С. 23.
2. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В., Риманова геометрия в целом. М.: Мир, 1971.
3. Докур, 1971; Dautcourt G., Gen. Relat. Gravit. V. 2. P. 97.
4. Клейн, 1919; Klein F., Proc. K. Akad. Wet. Amst. V. 21. P. 614.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Теория поля, Наука, М., 1967.
6. Лашез-Рей и Люмине, 1995; Lachieze-Rey M., Luminet J.-P., Phys. Rep. V. 254. P. 135.
7. Соколов Д.Д., 2002; Астрон. журн. Т. 79. С. 579.
8. Соколов Д.Д., 2003; Астрон. журн., Т. 80б 1059-1963.
9. Фирц и Йост, 1965; Firz M., Jost R., Helv. Phys. Acta V. 38. P. 778.

### References:

1. Gertsenshtein M.E., Konstantinov Yu.N., 1975; v sb. Problemy teorii gravitatsii i elementarnykh chastits, T. 6, M., Atomizdat. S. 23.
2. Gromol D., Klingenberg V., Meier V., Rimanova geometriya v tselom. M.: Mir, 1971.

3. Dokur, 1971; Dautcourt G., Gen. Relat. Gravit. V. 2. P. 97.
4. Klein, 1919; Klein F., Proc. K. Akad. Wet. Amst. V. 21. P. 614.
5. Landau L.D., Lifshits E.M., Teoriya polya, Nauka, M., 1967.
6. Lashez-Rei i Lyumine, 1995; Lachieze-Rey M., Luminet J.-P., Phys. Rep. V. 254. P. 135.
7. Sokolov D.D., 2002; Astron. zhurn. T. 79. S. 579.
8. Sokolov D.D., 2003; Astron. zhurn., T. 80b 1059-1963.
9. Firts i Iost, 1965; Firz M., Jost R., Helv. Phys. Acta V. 38. P. 778.

УДК 523.11

### Электрический заряд в закрытой космологической модели

Дмитрий Дмитриевич Соколов <sup>a, \*</sup>

<sup>a</sup> Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Российская Федерация

**Аннотация.** В рамках стандартной общей теории относительности полный электрический заряд в замкнутой космологической модели в точности обращается в нуль. Это значит, что даже гипотетически нельзя рассматривать электрическое поле уединенного заряда, строить функцию Грина и т.д. В работе указана возможность некоторой модификации ОТО, которая допускает подобные операции. Идея модификации основана на конструкциях экспоненциального отображения и касательного расслоения.

**Ключевые слова:** электрический заряд, закрытая космологическая модель.

---

\* Корреспондирующий автор  
Адреса электронной почты: [sokoloff.dd@gmail.com](mailto:sokoloff.dd@gmail.com) (Д.Д. Соколов)